Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

De même, si nous supposons que $K^{(2)}(x, y)$ et $\overline{K(x, y)}$ aient pour valeurs singulières respectivement $-\lambda_k^2$ et λ_k^2 $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ et que

$$\int_a^b K^{(2)}(x, x)\, dx = -\sum_{k=1} \frac{1}{\lambda_k^2},$$

on déduit de la même manière que

$$K(x, y) \equiv -K(y, x).$$

Donc il n'existe pas de noyau $K(x, y)$ non symétrique (borné et intégrable), tel que le genre de $D(\lambda)$ (Fredholm) soit au plus égal à un, tel que les noyaux itérés (Fredholm et Schmidt) $[K^{(2)}(x, y)$ et $\overline{K(x, y)}]$, aient les mêmes valeurs singulières (réciproquement) respectives.

De même, il n'existe pas de noyau non symétrique $K(x, y)$, borné et intégrable, et tel que le genre de $D(\lambda)$ (Fredholm), soit au plus égal à un — sauf le noyau symétrique gauche — tel que $K^{(2)}(x, y)$ et $\overline{K(x, y)}$ aient les valeurs singulières (respectivement et réciproquement) égales et de signes contraires.

Remarque. — Il résulte de ce qui précède (et l'on peut démontrer aussi directement) que s'il existe un noyau non symétrique, borné et intégrable, ayant les mêmes valeurs singulières (Fredholm et Schmidt), *le genre de* $D(\lambda)$ correspondant à ce noyau non symétrique, *est égal à deux*.

STATISTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel.* Note (¹) de M. **Serge Bernstein**, présentée par M. Émile Borel.

Soit H un groupe d'individus contenant trois classes A, B, C différentes. Supposons que les individus de chaque classe puissent appartenir à deux sexes différents et admettons que la probabilité d'appartenir à l'un des deux sexes est la même pour chaque classe. Nous dirons alors que les individus du groupe H sont soumis à une *panmixie normale*, s'il n'y a aucune sélection, c'est-à-dire si tous les croisements sont également probables, également fertiles, et si le taux de mortalité est le même pour toutes les classes. En admettant de plus que tous les croisements conduisent à des individus de même groupe H, nous pouvons déterminer chaque loi permanente d'hérédité

(¹) Séance du 10 septembre 1923.

par 18 coefficients non négatifs E_{AA}^{A}, E_{AA}^{B}, ..., E_{CC}^{A}, où E_{AB}^{C} représente, par exemple, la probabilité pour que le croisement d'un individu de la classe A avec un individu de la classe B donne un individu de la classe C. On aura évidemment six relations de la forme

$$E_{AA}^{A} + E_{AA}^{B} + E_{AA}^{C} = 1. \tag{1}$$

Nous dirons qu'une loi d'hérédité satisfait au *principe de stationnarité si, à partir de la seconde génération, la distribution des individus entre les trois classes reste la même dans toutes les générations successives*.

Dans ces conditions nous allons établir le théorème suivant :

La seule loi d'hérédité, compatible avec le principe de stationnarité, d'après laquelle le croisement d'un individu de la classe A *avec un individu de la classe* B *donne toujours un individu de la classe* C, *est la loi de Mendel* [les classes A et B seront des lignes pures, c'est-à-dire $E_{AA}^{A} = E_{BB}^{B} = 1$, et la classe C sera hybride ([1])].

En effet, α, β, γ ayant respectivement les probabilités d'appartenir aux classes A, B, C dans la première génération, on aura, en désignant par α_1, β_1, γ_1 les probabilités d'appartenir aux mêmes classes dans la seconde génération,

$$\alpha_1 = f(\alpha, \beta, \gamma), \qquad \beta_1 = \varphi(\alpha, \beta, \gamma), \qquad \gamma_1 = \psi(\alpha, \beta, \gamma), \tag{2}$$

où f, φ, ψ sont des formes quadratiques à coefficients non négatifs, telles que

$$f + \varphi + \psi \equiv (\alpha + \beta + \gamma)^2, \tag{3}$$

à cause de (1). D'après le principe de stationnarité, on doit avoir identiquement :

$$\left\{\begin{array}{l} (\alpha+\beta+\gamma)^2 f(\alpha,\beta,\gamma) \equiv f[f(\alpha,\beta,\gamma), \varphi(\alpha,\beta,\gamma), \psi(\alpha,\beta,\gamma)], \\ (\alpha+\beta+\gamma)^2 \varphi(\alpha,\beta,\gamma) \equiv \varphi[f(\alpha,\beta,\gamma), \varphi(\alpha,\beta,\gamma), \psi(\alpha,\beta,\gamma)], \\ (\alpha+\beta+\gamma)^3 \psi(\alpha,\beta,\gamma) \equiv \psi[f(\alpha,\beta,\gamma), \varphi(\alpha,\beta,\gamma), \psi(\alpha,\beta,\gamma)]. \end{array}\right. \tag{4}$$

La condition, qui résulte de l'hypothèse que le croisement mutuel des individus de la classe A et B conduit nécessairement à des individus de la

([1]) Rappelons que, d'après la loi de Mendel,

$$E_{CC}^{A} = E_{CC}^{B} = \frac{1}{4}, \qquad E_{CC}^{C} = E_{AC}^{C} = E_{BC}^{C} = E_{AC}^{A} = E_{BC}^{B} = \frac{1}{2},$$

les autres coefficients étant nuls à cause de (1).

classe C, signifie que dans f et φ il n'y a pas de terme en $\alpha\beta$. Or, si, quels que soient α, β, γ (avec $\alpha+\beta+\gamma=S=1$), les équations (2) ne donnaient qu'un nombre limité de valeurs à α_1, β_1, γ_1, les fonctions f, φ et ψ ne dépendraient que de S, ce qui est incompatible avec la remarque que l'on vient de faire. Donc, on aura nécessairement

$$\left\{\begin{aligned} f(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha S + F(\alpha,\beta,\gamma), \\ \varphi(\alpha,\beta,\gamma) &= \beta S + F(\alpha,\beta,\gamma), \\ \psi(\alpha,\beta,\gamma) &= \gamma S - 2F(\alpha,\beta,\gamma), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

où l'équation du second degré

$$F(\alpha,\beta,\gamma)=0$$

devra être satisfaite par toutes les distributions stationnaires; en remarquant, d'autre part, que le coefficient de α^2 dans f et de β^2 dans φ ne saurait dépasser 1, on trouve la forme nécessaire de

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = -\alpha\beta + l\alpha\gamma + m\beta\gamma + n\gamma^2.$$

En substituant ensuite les expressions (5) dans (4), on obtient l'identité unique

$$S \equiv 2F'_\gamma - F'_\alpha - F'_\beta, \tag{6}$$

de laquelle on tire immédiatement

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = -\alpha\beta + \frac{1}{4}\gamma^2. \tag{7}$$

Par conséquent, nous déduisons de (5) la forme nécessaire des fonctions

$$\left\{\begin{aligned} f(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha S - \alpha\beta + \frac{1}{4}\gamma^2 = \left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)^2, \\ \varphi(\alpha,\beta,\gamma) &= \beta S - \alpha\beta + \frac{1}{4}\gamma^2 = \left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)^2, \\ \psi(\alpha,\beta,\gamma) &= \gamma S + 2\alpha\beta - \frac{1}{2}\gamma^2 = 2\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

qui exprime précisément la loi d'hérédité de Mendel.

Ce résultat pourrait être appliqué, il me semble, pour reconnaître si la loi d'hérédité dans un groupe H est celle de Mendel ou non; il suffit, après avoir constaté que le croisement des deux classes A et B conduit toujours à la classe unique C, de réaliser *la panmixie normale* (en corrigeant, s'il y a lieu, les inégalités de fertilité et de mortalité), — pour vérifier la loi de Mendel il sera nécessaire et suffisant de constater qu'un régime stationnaire s'est établi dès la seconde génération.

Je ne m'arrêterai pas sur les formules (que j'ai établies ailleurs), par lesquelles il faudrait remplacer les formules (8), si l'on rejetait la condition de Mendel que le croisement de A avec B produit C, et je laisserai également de côté pour le moment le problème de la loi d'hérédité dans le cas où le nombre de classes est supérieur à trois.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur une différence caractéristique entre les modes d'action des freins d'avant et d'arrière.* Note de M. **A. Petot**, transmise par M. P. Appell.

On fait en ce moment de grands efforts pour perfectionner le freinage sur l'avant; je vais essayer de montrer, en vue de ces recherches, ce qu'on peut demander respectivement aux freins d'arrière et d'avant, quels que soient les dispositifs adoptés. Soient A et A′ les points de contact des roues arrière avec le sol, A_1 et A'_1 ceux des roues avant; φ et φ' les angles de braquage en A_1 et A'_1, que l'on supposera constants pendant le freinage; C le point où le prolongement de A′A est rencontré à la fois par les deux normales en A_1 et A'_1 aux plans médians des roues avant, ρ la distance de ce point au milieu de AA′; on prendra pour trièdre trirectangle de référence $Gxyz$ où G est le centre de gravité, Gx la parallèle à l'axe longitudinal et Gz la verticale ascendante.

1. *Double objet d'un frein d'automobile.* — Considérons une automobile lancée en courbe sur palier, et voyons les conditions à remplir pour l'arrêter, à l'aide des freins, en faisant décroître sa vitesse d'une manière continue, sans choc ni dérapage. On peut admettre que, pendant le freinage, la voiture tourne autour de la verticale du centre instantané C, ou encore que son centre de gravité G décrit un arc de cercle autour de cette verticale en même temps qu'elle tourne sur elle-même autour de la verticale Gz.

On aperçoit ainsi le double objet des freins, qui est d'arrêter à la fois le mouvement de translation propre de la masse entière, supposée concentrée au centre de gravité, et le mouvement de rotation autour de la verticale mobile passant par ce point. Il reste à voir par quels organes et comment ces deux fonctions peuvent être remplies simultanément. Soient Σ le système des réactions *tangentielles* exercées par le sol sur les roues freinées et F_x,